Cours de:

2010-2011

Résistance Des Matériaux

(R.D.M)

Université Hassan II Ain Chok

Fac. Sciences Casablanca

LP : TMBTP

Pr: A. AKEF

INTRODUCTION

GENERALE

La Résistance Des Matériaux (R.D.M.), est la science du dimensionnement des pièces ou éléments qui constituent un ouvrage d'art ou tout objet utilitaire.

Le génie civil, domaine de la création intelligente, s'appuie essentiellement sur la R.D.M. pour la réalisation des ouvrages d'art ou des constructions telles que les gros œuvres des bâtiments, les ponts en béton armé ou métalliques etc…

Le dimensionnement (réalisé par des bureaux d'études) fait appel à des calculs qui prévoient le comportement mécanique de l'objet, vis à vis des contraintes imposées. Toute conception doit réunir les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique.

Historiquement, les premiers travaux de recherche sur la R.D.M (tension et flexion des poutres) remontent à la fin du XVIe siècle(Etudes expérimentales de Galilée (physicien, mathématicien et astronome italien 1564-1642).

En 1678, Robert Hooke énonce les bases de la théorie de l'élasticité linéaire.

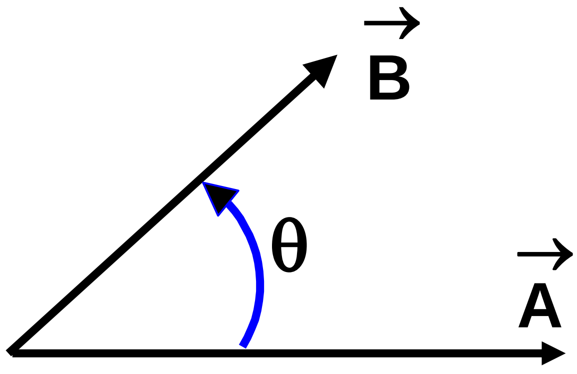
Chapitre I

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA STATIQUE

I <u>Rappels mathématiques</u>

1) <u>Produit scalaire</u>

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ (on dit $\vec{A}$ scalaire $\vec{B}$) est la quantité algébrique définie par : $\vec{A} \bullet \vec{B}$



$$\boxed{\vec{A} \bullet \vec{B} = x.x' + y.y' + z.z'}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\mathbf{A}} &= \mathbf{x}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z}\vec{\mathbf{k}} \\ \vec{\mathbf{B}} &= \mathbf{x}'\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y}'\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z}'\vec{\mathbf{k}} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\vec{A} \bullet \vec{B} = \left\|\vec{A}\right\| \times \left\|\vec{B}\right\| \times \cos\theta = \vec{B} \bullet \vec{A}}$$

Produits scalaires éléments élémentaires dans une base orthonormée $\left\{\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\vec{k}\right\}$.

$$\boxed{\vec{i}\bullet\vec{i}=\vec{j}\bullet\vec{j}=\vec{k}\bullet\vec{k}=1}$$

$$\boxed{\vec{i}\bullet\vec{j}=\vec{j}\bullet\vec{k}=\vec{k}\bullet\vec{i}=0}$$

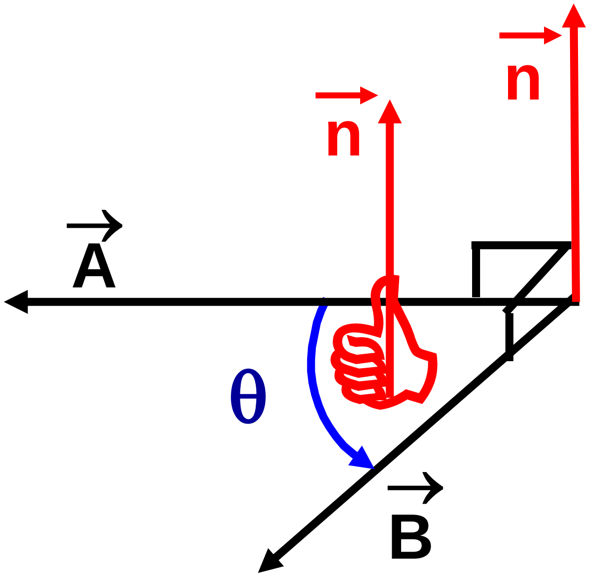
2) Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ (on dit $\vec{A}$ vectoriel $\vec{B}$) est le vecteur définie par : $\vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}}$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \left\| \vec{A} \right\| \times \left\| \vec{B} \right\| \sin\theta \ \vec{n}$$

$$= -\vec{B} \wedge \vec{A} \ ; \ 0 \le \theta \le \pi$$

$\vec{n}$: vecteur unitaire



$$\vec{A} = \mathbf{x}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z}\vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{B} = \mathbf{x}'\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y}'\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z}'\vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \mathbf{a}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{b}\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{c}\vec{\mathbf{k}}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

$$a = yz' - y'z \ ; b = x'z - xz' \ ; c = xy' - x'y$$

Produits vectoriels élémentaires dans une base orthonormée directe $\left\{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\right\}$**.**

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k} \;\; ; \;\; \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i} \;\; ; \;\; \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j} \\ \vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k} \;\; ; \;\; \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i} \;\; ; \;\; \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j} \end{array}}$$

Exercice 1

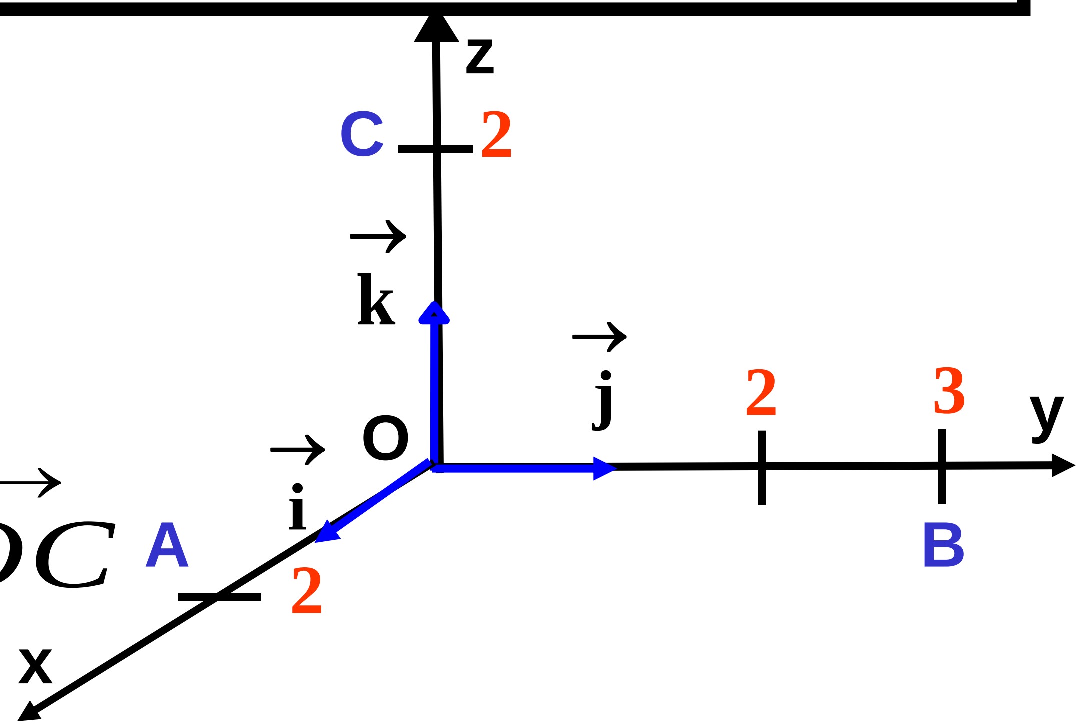
On considère le système d'axes (O, x, y, z) de base orthonormée directe $\left\{ \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}} \right\}$.

Effectuer les calculs suivants :

$$\vec{OA} \bullet \vec{AB}$$

$$\vec{AB} \bullet \vec{BC}$$

$$\left(\vec{OA} \wedge \vec{OB} \right) \bullet \vec{OC}$$



Exercice 2

$(\mathbf{O}\,;\,\vec{\mathbf{i}},\,\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$ est un repère orthonormée directe. On considère les vecteurs :

$$\vec{\mathbf{A}} = 3\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{k}} \qquad \vec{\mathbf{B}} = -2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}} \qquad \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}}$$

1) Calculer le produit scalaire $\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}}$ et en déduire l'angle entre les vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$.

2) Calculer les composantes du vecteur $\vec{\mathbf{C}}$.

3) Calculer par deux méthodes la norme de $\vec{\mathbf{C}}$.

II Statique des corps rigides

1) Système matériel

a - Définition

Un système matériel est un corps, ou un ensemble de corps, ou une partie d'un corps dont-on se propose d'étudier l'équilibre ou le mouvement.

b - Remarque

Dans ce cours, on se limitera à l'étude des systèmes matériels en équilibre ou en quasi-équilibre (hypothèses des petites déformations).

2) Force

a - Définition

Une force représente la mesure de ce qui pousse ou tire sur un objet. Elle est définie par un point d'application, une direction (un support), un sens et une valeur (module).

b - Unité

L'unité de la force est le Newton (N) ou le kilogramme-force (kgf). 1kgf = 10N=1daN

c - moment d'une force par rapport à un point.

Le **moment** d'une force $\vec{F}$ appliquée en un point M par rapport à un point O est donné par la **relation vectorielle** :

☞ $$\boxed{\vec{M}_{\vec{F}/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}}$$

d - moment d'une force par rapport à un axe.

Le **moment** d'une force $\vec{F}$ appliquée en un point B par **rapport à un axe** Δ est donné par la **relation scalaire** :

$$M_{\vec{F}/\Delta} = \vec{M}_{\vec{F}/O}.\vec{u} = (\overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}).\vec{u} = \left(\overrightarrow{OB}, \vec{F}, \vec{u}\right)$$

$\vec{u}$ est le vecteur unitaire de Δ et O est un point quelconque de Δ.

3) Equilibre d’un corps ou d’un système

a - Définition

L'**équilibre** d'un solide signifie qu'il **ne bouge pas** (dans un référentiel donné) soit :

- aucune translation;
- aucune rotation autour de quelque point (ou pivot) que ce soit.

b - Remarque

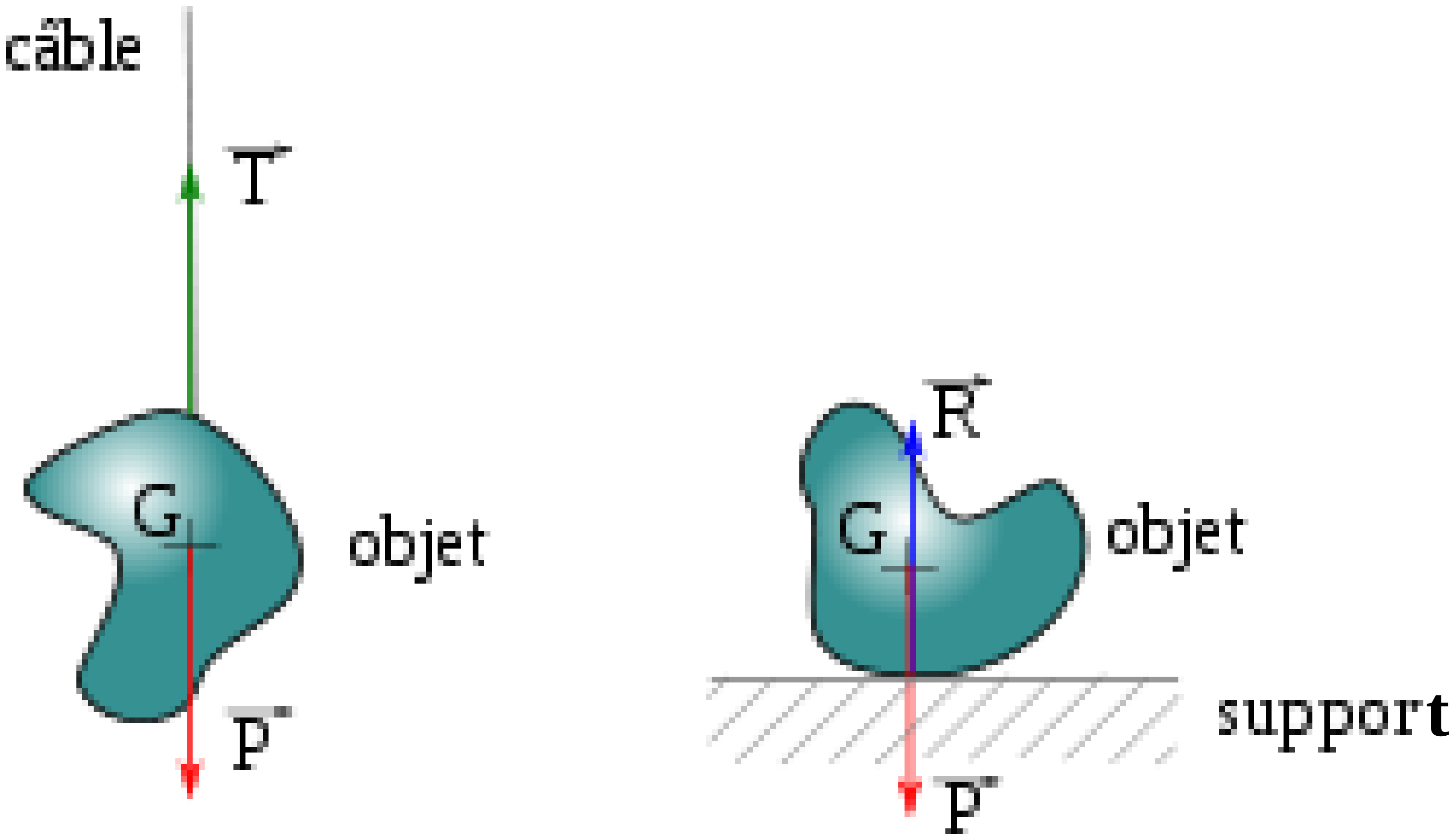
L'équilibre d'un système matériel se réalise uniquement grâce aux forces extérieures directement appliquées à sa surface limite (forces de contact) ou à ses molécules (forces à distance). Les forces intérieures ne sont pas pris en compte.

c - Principe de l’action et de la réaction

Lorsqu'un objet S_1 exerce une force (appelée « action ») sur un objet S_2, l'objet S_2 exerce une force opposée (appelée « réaction ») sur l'objet S_1. Ce principe est également appelé « troisième loi de Newton ».

d - Equilibre sous l’effet de deux forces

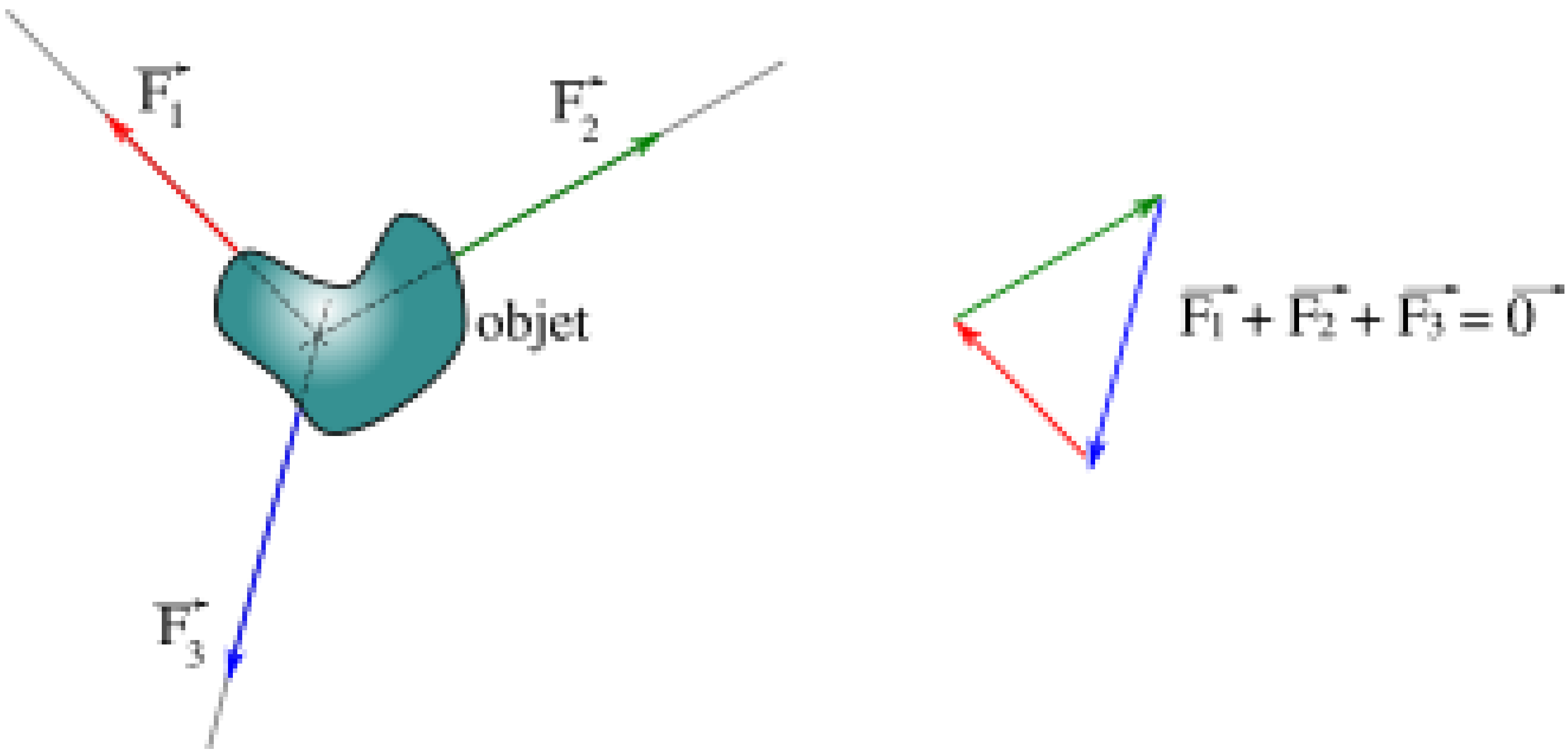
Un objet sollicité par deux forces est en équilibre si et seulement si ces deux forces sont de même valeur et directement opposées.



Solide en équilibre sous l'action de deux forces.

e - Equilibre sous l'effet de trois forces non parallèle

Un objet sollicité par trois forces non parallèles est en équilibre si et seulement si les supports de ces forces sont concourantes et leur somme vectorielle est nulle (polygone des forces est nulle).

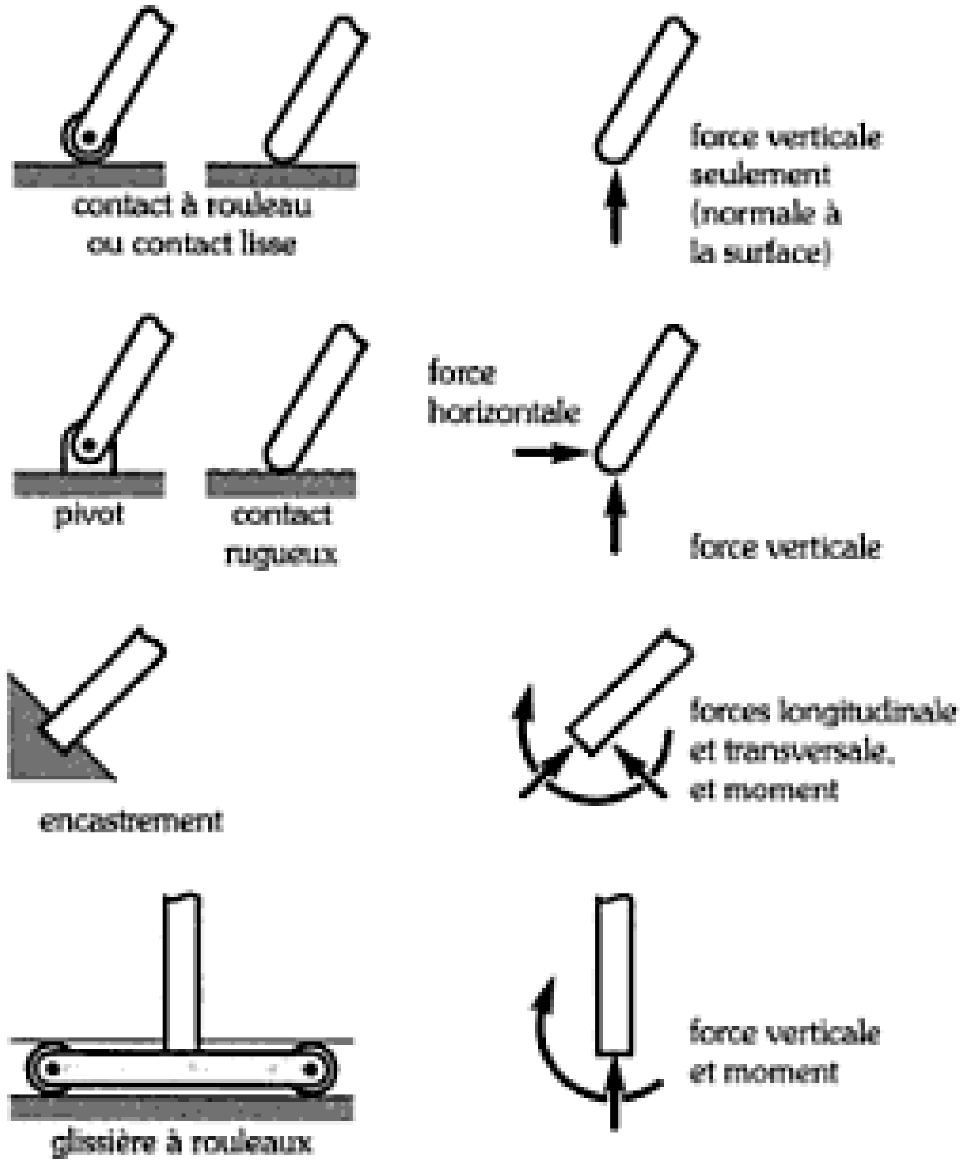


Solide en équilibre sous l’effet de trois forces.

f - Transmission des forces

Les forces sont transmises par l’intermédiaire des surfaces en contact. On détermine ces forces à partir des conditions d’équilibre en utilisant la géométrie du corps non déformé.

On néglige les variations d’angle et de longueur qui résultent de l’application des forces.



Représentation de la transmission des forces et des moments externes

g - Théorème fondamentale de l’équilibre

Pour qu’un **système matériel indéformable**, sollicité par plusieurs forces soit en **équilibre**, il faut et il suffit que **le torseur** associé au système des **forces extérieures** (forces de contact et de volume), appliquées au système soit **nulle**.

☞

$$[T]_O = \begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_{\vec{F}ext/O} = \vec{0} \end{cases}$$

O est un point quelconque

Après projection sur le système d'axes choisi, on obtient six équations.

4) Système isostatique ou hyperstatique

a - Système isostatique

Un système est **isostatique** ou statiquement déterminé si **le nombre d'inconnues** (forces), est **égal** au **nombres d'équations** d'équilibre. Le problème est mathématiquement déterminé.

b - Système hyperstatique

Un système est hyperstatique si le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations d'équilibre. Le problème est mathématiquement indéterminé. On lève l'indétermination en prenant en compte la déformation du système (petites déformations et compatibilité géométrique).

c - Remarque

On ne doit faire aucune hypothèse sur les forces extérieures inconnues. En d'autres termes, on ne connait ni leurs directions, ni leurs sens, ni leurs intensités. La détermination de ces caractéristiques fait l'objet de la résolution du problème.

Exercice3 :

On considère le système de vecteurs liés suivant :

$$(O, \overrightarrow{F_1})\,;\,(G, \overrightarrow{F_2})\,;\,(F, \overrightarrow{F_3})$$

$$(O, \overrightarrow{F_4})\,;\,(A, \overrightarrow{F_5})\,;\,(B, \overrightarrow{F_6})$$

Avec,

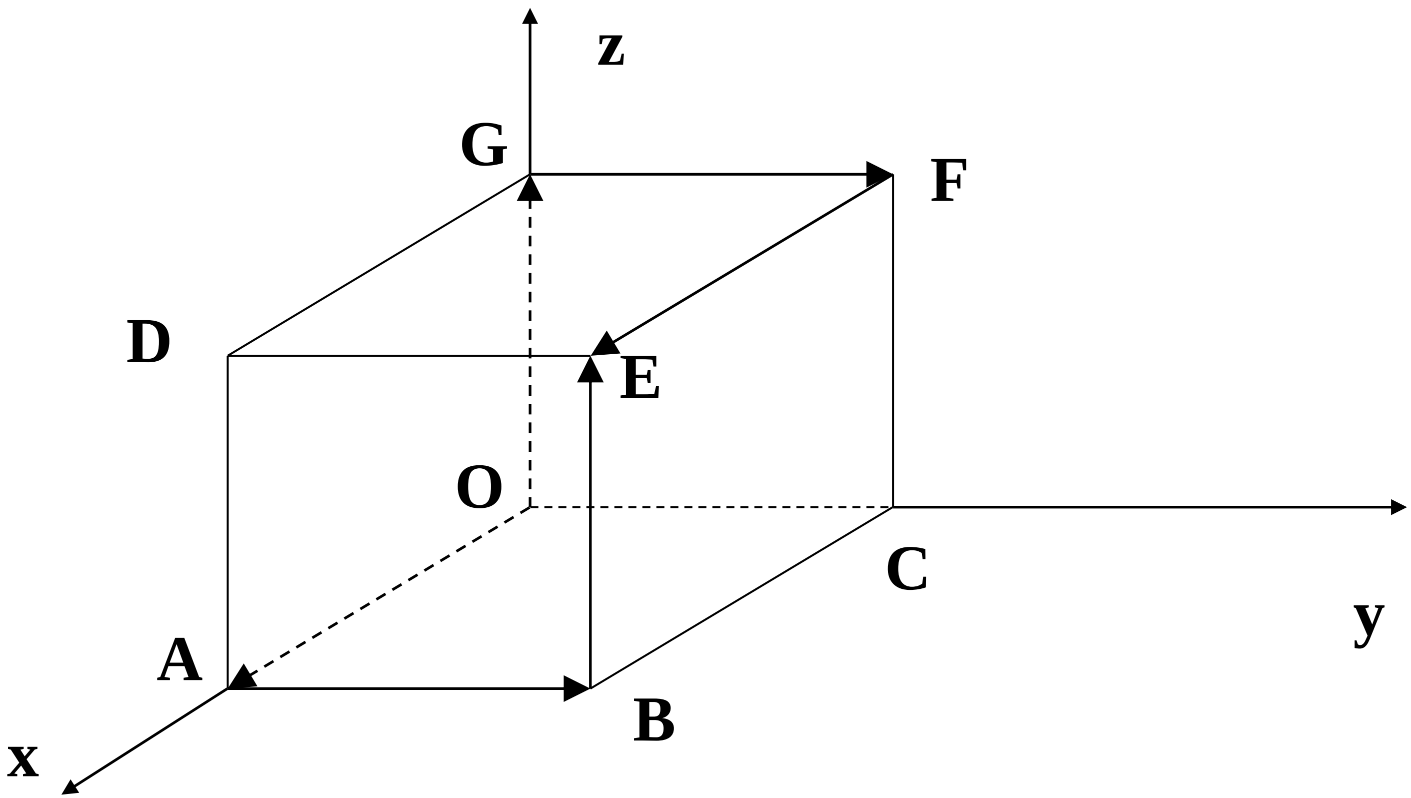
$$\vec{F}_1 = \overrightarrow{OG}\,;\,\vec{F}_2 = \overrightarrow{GF}\,;\,\vec{F}_3 = \overrightarrow{FE}$$

$$\vec{F}_4 = \overrightarrow{OA}\,;\,\vec{F}_5 = \overrightarrow{AB}\,;\,\vec{F}_6 = \overrightarrow{BE}$$

Déterminer :

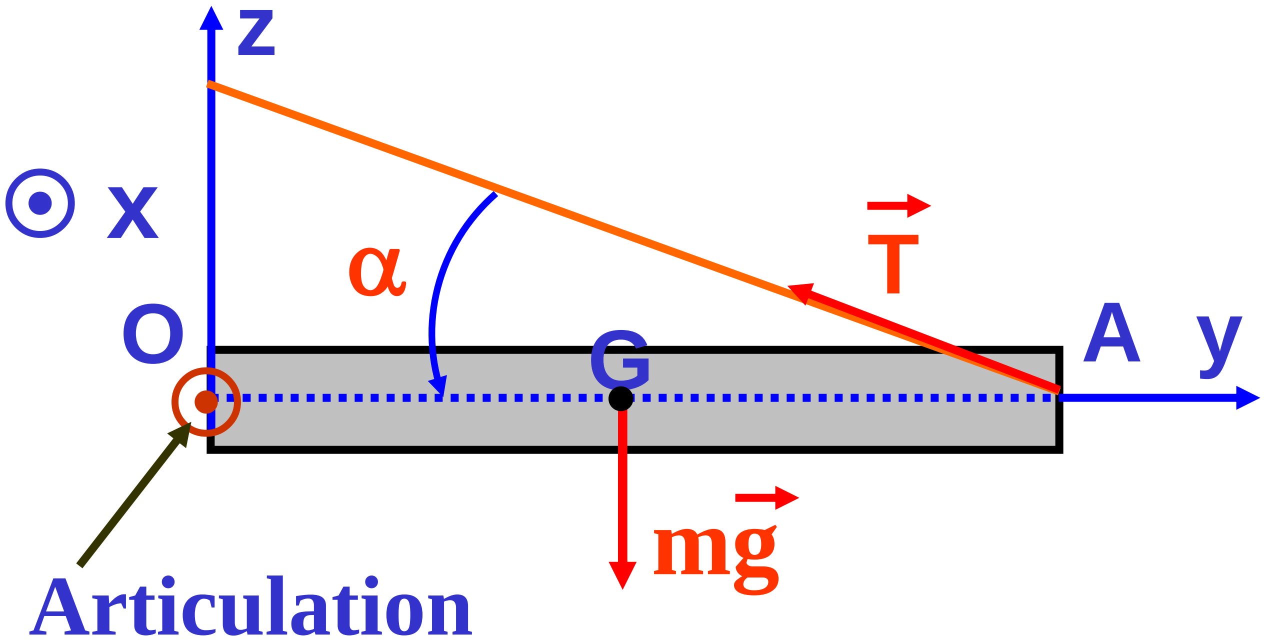
1) la résultante $\vec{F}_{ext}$.

2) le moment résultant en O $\vec{M}_{\vec{F}/O}$.



Exercice 4

Déterminer la tension du fil $\vec{T}$ et la réaction $\vec{R}$ au point O pour que la tige OA, de longueur L et de masse m, soit en équilibre (voir figure ci-dessous).



Exercice 5

Déterminer la réaction $\vec{R}_A$ du mur lisse et la réaction $\vec{R}_B$ du sol rugueux qui assurent l'équilibre de la tige AB, supposée homogène de longueur 2L et de masse m, dans le plan vertical (Oyz). On donne α.